15/12/15

$L(y) = b(x)$, $x \in I$

(i) $b(x) = p(x)$

(ii) $b(x) = p(x) e^{\lambda x}$ (ομοίως εάν έχω αντί για e, π.χ για 2 το μετατρέπω με βάση το e)

(iii) $b(x) = p(x) e^{\sigma x} \cdot \begin{cases} \cos\tau x \\ \sin\tau x \end{cases}$ // $\underbrace{L(x) = p(x) e^{(\sigma + i\tau)x}}$, ό,τι και αν έχω

$$\underbrace{p(x) e^{\sigma x} (\cos\tau x + i\sin\tau x)}$$

$$p(x) e^{\sigma x} \cos\tau x + i p(x) e^{\sigma x} \sin\tau x$$

(Όταν έχω cos παίρνω πραγματικό μέρος, όταν έχω sin παίρνω το φανταστικό)

Παράδειγμα 3iv,v

(iv) $y'' - 2y' + y = xe^{-x}\cos 2x$ (E)

(v) $y'' - 2y' + y = xe^{-x}\sin 2x$.

Θεωρώ την εξίσωση : $y'' - 2y' + y = xe^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$

δηλαδή $y'' - 2y' + y = xe^{(-1+2i)x}$ ⊛

$y = ze^{(-1+2i)x}$

$\rightsquigarrow z'' + 4(-1+i)z' - 8iz = x$.

Θέτω $z = \alpha x + \beta$

$z' = \alpha$

$z'' = 0$.

$4\alpha(-1+i) - 8i(\alpha x + \beta) = x$

$\rightsquigarrow \alpha = -\frac{1}{8}i$, $\beta = \frac{1}{16}(-1+i)$. Βρίσκουμε το z, άρα y(x) λύση της ⊛.

$y(x) = \left(-\frac{1}{8}ix + \frac{1}{16}(-1+i)\right)e^{(-1+2i)x}$, άρα μια μερική λύση της ⊛. Επομένως, μια μερική λύση της εξίσωσης (E) είναι $y_\mu(x) = \mathrm{Re}\, y(x)$.

$y(x) = \left[\left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right)i - \frac{1}{16}\right]e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$.

Θέλω το πραγματικό μέρος : $y_\mu(x) = e^{-x}\left[-\frac{1}{16}\cos 2x + (-1)\left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right)\sin 2x\right]$

Άσκηση 3iv

$y'' - y = x\sin x$

ΒΣΛ της ομογενούς $\{e^x, e^{-x}\}$

για την μερική λύση, θεωρώ την εξίσωση : $y'' - y = xe^{ix}$ ⊛

$\rightsquigarrow y = ze^{ix}$

$(z''e^{ix} + 2iz'e^{ix} - ze^{ix}) - ze^{ix} = xe^{ix} \rightsquigarrow z'' + 2zi - z - z = x \rightsquigarrow$

$z'' + 2iz' - 2z = x$. Άρα $z = \alpha x + \beta$, επομένως $2i\alpha - 2(\alpha x + \beta) = x$

$\alpha = -1/2$ και $\beta = -i/2$. Μια μερική λύση της ⊛ είναι η:

$y(x) = (-1/2\, x - i/2)(\cos x + i\sin x)$, άρα μια μερική λύση της (E)

$y_\mu(x) = \mathrm{Im}\, y(x)$, $y_\mu(x) = -\frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

$y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + y_p(x)$, $x \in I$.

• $y_1' = y_1 - 2y_2 \rightsquigarrow y_1' - y_1 = -2c_2e^{-x}$ Λύνουμε και βρίσκουμε
$y_2' = -y_2 \rightsquigarrow y_2(x) = ce^{-x}$ την y_1.

Όταν δοθεί κάποιο περίπλοκο από το παραπάνω, το φέρνουμε σε αυτή την μορφή.

$\cancel{y_1'' = y_1}$

• $y_1' = y_1 + 12y_2$
$y_2' = 3y_1 + y_2$
// Θα παραγωγίσω, όμως όσο παραγωγίζω προσθέτω λύσεις, άρα είμαι προσεκτικός σε αυτό, γιατί κάποιες μπορεί να μην ικανοποιούν την αρχική.

$y_1'' = y_1' + 12y_2'$
$= y_1 + 12y_2 + 12(3y_1 + y_2) \to y_1'' = 37y_1 + 24y_2$
$\oplus$ $y_1' = y_1 + 12y_2 \} \cdot(-2)$
$y_1'' - 2y_1' = 35y_1 \to y_1'' - 2y_1' - 35y_1 = 0$

Άρα έχουμε: $\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$
7 , -5

Άρα το $y_1(x) = c_1e^{7x} + c_2e^{-5x}$ // Συνήθως παραγωγίζω μια φορά λιγότερο από τον αριθμό των αγνώστων.

<u>Παράδειγμα 3 σελίδα 202</u>

$y_1' = y_1 - y_2 - y_3$
$y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3$
$y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3$

$y_1'' = y_1' - y_2' - y_3'$
$= (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$
$y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3$
$y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3' \Rightarrow y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3$

$y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0$
$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$
$\lambda^2(\lambda-3) - 4(\lambda-3) = 0$
$(\lambda^2-4)(\lambda-3) = 0 \to 2, -2, 3$

$y_1(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$

<u>Άσκηση 3i σελίδα 213</u>

$y_1' = y_1 + y_2 + e^x$
$y_2' = y_1 - y_2 - e^x$

$y_1'' = y_1' + y_2' + e^x$
$= y_1 + y_2 + e^x + y_1 - y_2 - e^x + e^x$
$y_1'' = 2y_1 + e^x$
$y_1 = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + y_\mu$
και μετά την y_2 αλγεβρικά από την πρώτη εξίσωση.
(Θεωρία σελίδα 207).

<u>Β-40 άλυτες ασκήσεις</u>
(E) $ay'' + by' + cy = e^{-kx}$, $x \in \mathbb{R}$, $a,b,c,k > 0$, $bk \neq ak^2 + c$
$\rightsquigarrow$ όλες οι λύσεις της εξίσωσης τείνουν στο 0 για $x \to \infty$.

(E_0) $ay'' + by' + cy = 0$
$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \,\|\, \lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ΒΣΛ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ $\Delta > 0$.
με την διαφορά ότι αν $\Delta < 0$ τότε μιγαδική λύση.
ΒΣΛ πραγμ. $\{Re\, e^{\lambda_1 x}, Im\, e^{\lambda_1 x}\}$ συζυγείς γι' αυτό λ_1.
Ενώ $\Delta = 0$ $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
$ay'' + by' + cy = e^{-kx}$
$y = ze^{-kx}$
$a[z''e^{-kx} + 2z'(-k)e^{-kx} + zk^2e^{-kx}] + b(z'e^{-kx} - zke^{-kx}) + cze^{-kx} = e^{-kx}$
$az'' - 2kaz' + ak^2z + bz' - bz + cz = 1 \rightsquigarrow az'' + z'(-2ka + b) + (ak^2 - bk + c)z = 1$

$z = \dfrac{1}{ak^2-bk+c}$, $y_\mu(x) = \dfrac{1}{ak^2-bk+c} e^{-kx}$

• Αν $ak^2-bk+c=0$ τότε:

(i) $-2ka+b \neq 0 \rightsquigarrow z' = \mu \Rightarrow z = \mu x + \lambda$

(ii) $2k\alpha = b$

$\alpha z'' = 1 \rightsquigarrow z'' = \dfrac{1}{\alpha} \rightsquigarrow z = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{x^2}{2} + kx + \lambda$

<u>Β-51 άλυτες ασκήσεις</u>

(i) $b: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής : $\exists c>0 \int_x^{x+1} |b(s)|ds < c$, $x \geq 0$

Ν.δ.ο $e^{-x}\int_0^x e^s|b(s)|ds \leq \dfrac{ce}{c-1}$, $x \geq 0$.

(ii) όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι φραγμένες στο $[0,+\infty)$

$y''+2y'+2y=b$.

(ii) $y''+2y'+2y=0$

$\lambda^2+2\lambda+2=0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2\pm i2}{2} = -1\pm i$

$y_1(x) = e^{-x}\cos x \longrightarrow 0$

$y_2(x) = e^{-x}\sin x \longrightarrow 0$

$0 \leq |y_1(x)| = |e^{-x}\cos x| \leq e^{-x} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \lim_{+\infty}|y_1(x)| = 0$. Άρα η συνάρτηση είναι φραγμένη. Οι λύσεις της ομογενούς όλες φραγμένες στο $[0,+\infty)$

$|y_\mu(x)| = \left|y_1(x)\int_0^x \dfrac{W_1(s)}{W(s)} b(s)ds + y_2(x)\int_0^x \dfrac{W_2(s)}{W(s)} b(s)ds\right|$

$\leq |y_1(x)|\int_0^x \left|\dfrac{W_1(s)}{W(s)}\right||b(s)|ds + |y_2(x)|\int_0^x \left|\dfrac{W_2(s)}{W(s)}\right||b(s)|ds$

$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix} = e^{-2x}\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{vmatrix}$

$= \cos^2 x - \cancel{\sin x\cos x} + \cancel{\sin x\cos x} + \sin^2 x = 1$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots \\ 1 & \cdots \end{vmatrix} = -e^{-x}\sin x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 1 \end{vmatrix} = e^{x}\cos x$$

$$|y_1(x)| \int_0^x \left| \frac{W_1(s)}{W(s)} \right| |b(s)|\,ds = |e^{-x}\cos x| \int_0^x \left| \frac{-e^{-s}\sin s}{e^{-2s}} \right| |b(s)|\,ds \le$$

$$e^{-x}|\cos x| \int_0^x e^{s}|\sin s||b(s)|\,ds \le e^{-x}\int_0^x e^{s}|b(s)|\,ds \overset{(i)}{\le} \frac{ce}{e-1}$$

*(No given or B-52, B-56, B-39)